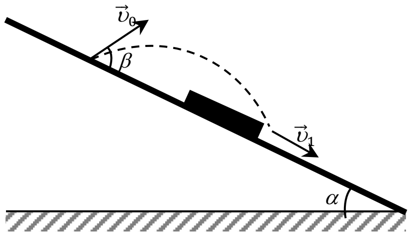
Министерство образования и науки РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада
2016-2017

ФИЗИКА

10 класс

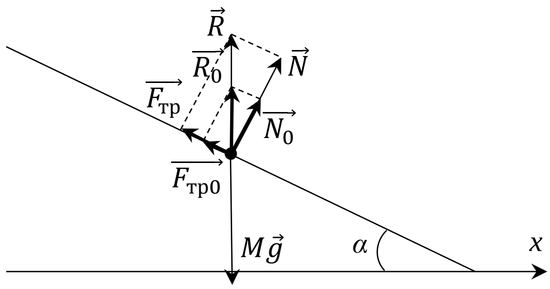
II этап

1. По доске, расположенной под углом α к горизонту, скатывается без трения брусок с неизменной скоростью υ_1 и массой M. Один из Фиксиков забрасывает вслед движущемуся бруску небольшой кусок Лизуна с начальной скоростью υ_0, направленной под углом β к поверхности доски. Найдите скорость бруска вместе с прилипшим к нему сверху Лизуном, если известно, что этот брусок после прилипания Лизуна не останавливался, а масса Лизуна равна m.



Решение

Рисунок **(2 балла)**



На систему «Брусок-Лизун» за время их взаимодействия действуют внешние силы: направленные вертикально вниз силы тяжести $M\vec{g}$ и $m\vec{g}$, изменяющаяся со временем сила реакции $\vec{R}$ со стороны доски. При движении бруска по поверхности доски с постоянной скоростью сила $\vec{R}$ всегда направлена вертикально вверх, так как результирующая всех сил должна быть равна нулю. **(4 балла)**

Разложим $\vec{R}$ на силу нормального давления $\vec{N}$ и силу трения $\overrightarrow{F_{тр}}$: $\vec{R} = \vec{N} + \overrightarrow{F_{тр}}$. Ясно, что $F_{тр} = \mu N$ (μ – коэффициент трения скольжения). До прилипания Лизуна сила реакции $\overrightarrow{R_0} = \overrightarrow{N_0} + \overrightarrow{F_{тр0}}$, где $F_{тр0} = \mu N_0$ и вектор $\overrightarrow{R_0}$ направлен вертикально вверх. **(2 балла)**

В ходе взаимодействия бруска и Лизуна сила реакции N возрастает в k раз ($N = kN_0$), сила трения $\overrightarrow{F_{тр}}$ тоже возрастает в k раз и вектор $\vec{R}$ остается параллельным $\overrightarrow{R_0}$, то есть вектор $\vec{R}$ направлен вертикально вверх. **(4 балла)**

Итак, для системы «брусок-Лизун» за время их взаимодействия все внешние силы направлены вертикально. Отсюда следует, что проекция импульса системы на горизонтальную ось ox сохраняется:

$$M\upsilon_1 \cos\alpha + m\upsilon_0 \cos(\beta - \alpha) = (M + m)\upsilon_2 \cos\alpha.$$ **(4 балла)**

Из этого равенства находим скорость бруска с Лизуном:

$$\upsilon_2 = \frac{M\upsilon_1 \cos\alpha + m\upsilon_0 \cos(\beta - \alpha)}{(M+m)\cos\alpha}.$$ **(4 балла)**

Ответ: $\upsilon_2 = \dfrac{M\upsilon_1 \cos\alpha + m\upsilon_0 \cos(\beta - \alpha)}{(M+m)\cos\alpha}$.

2. К источнику постоянного напряжения U подключены последовательно два одинаковых плоских конденсатора, заполненные диэлектриками с диэлектрической проницаемостью ε. Как и во сколько раз изменится напряженность электрического поля конденсатора, из которого будет вынут диэлектрик?

Решение

Рассмотрим случай, когда оба конденсатора, заполненные диэлектриками соединены последовательно и подключены к источнику напряжения U. При последовательном соединении конденсаторов заряд на каждой пластине обоих конденсаторов одинаков по модулю:

$$q_1 = q_2.$$

Воспользуемся определением емкости $C = \frac{q}{U}$ и распишем заряд каждого конденсатора как

$$C_1 U_1 = C_2 U_2.$$ **(2 балла)**

Теперь примем во внимание, что емкость плоского конденсатора зависит от геометрических параметров $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$, где S и d соответственно площадь обкладки и расстояние между обкладками конденсатора. Тогда:

$$\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} U_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} U_2.$$ **(2 балла)**

Так как по условию задачи конденсаторы одинаковые, то отсюда следует, что $U_1 = U_2$. А при последовательном соединении выполняется условие:

$$U_1 + U_2 = U.$$

Тогда $U_1 = \frac{U}{2}$. Зная связь напряженности электрического поля E с напряжением $E = \frac{U}{d}$, выразим напряженность поля конденсатора, заполненного диэлектриком:

$$E_1 = \frac{U_1}{d} = \frac{U}{2d}. \qquad (1)$$ **(2 балла)**

Теперь рассмотрим случай, когда из первого конденсатора вынимают диэлектрик. Так как конденсаторы остаются подключены последовательно, то заряды на обкладках по-прежнему равны по модулю. Однако, отсутствие диэлектрика в одном из конденсаторов, приведет к перераспределению зарядов, и условие равенства зарядов можно записать так:

$$q'_1 = q'_2.$$

Распишем заряды через емкость и разность потенциалов:

$$C'_1 U'_1 = C_2 U'_2.$$ **(2 балла)**

И воспользуемся определением емкости плоского конденсатора:

$$\frac{\varepsilon_0 S}{d} U'_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} U'_2.$$

$$U'_1 = \varepsilon U'_2.$$

$$U'_2 = \frac{U'_1}{\varepsilon}.$$ **(2 балла)**

Здесь учтено, что первый конденсатор теперь стал воздушным $(\varepsilon = 1)$ и произошло перераспределение напряжения на обкладках конденсаторов. Но так как они соединены последовательно, то выполняется равенство:

$$U'_1 + U'_2 = U.$$

Отсюда с учетом полученного значения U'_2 получаем:

$$U'_1 + \frac{U'_1}{\varepsilon} = U.$$

И, выражая значение U'_1, имеем:

$$U'_1 = \frac{\varepsilon U}{\varepsilon+1}.$$ **(2 балла)**

Напряженность электрического поля на обкладках конденсатора без диэлектрика будет рассчитана согласно определению:

$$E'_1 = \frac{U'_1}{d}.$$

Или, подставляя сюда значение U'_1, имеем:

$$E'_1 = \frac{\varepsilon U}{d(\varepsilon+1)}. \quad (2)$$ **(2 балла)**

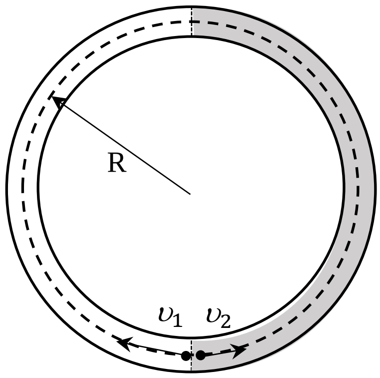
Теперь найдем отношение E'_1 к E_1, разделив соотношение (2) на (1):

$$\frac{E'_1}{E_1} = \frac{\varepsilon U}{d(\varepsilon+1)} \cdot \frac{2d}{U} = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1}.$$ **(2 балла)**

Теперь проанализируем результат согласно условию задачи. Так как $\varepsilon > 1$ для любого диэлектрика, то отношение $\frac{E'_1}{E_1} > 1$. А это значит, что $E'_1 > E_1$. Значит, напряженность электрического поля конденсатора без диэлектрика возросла. **(4 балла)**

Ответ: $\frac{E'_1}{E_1} = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1}$. Напряженность конденсатора без диэлектрика возросла.

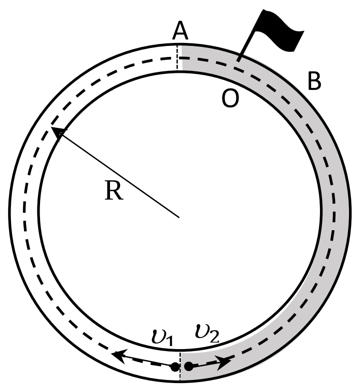
3. В горизонтальном сквозном кольцевом тоннеле радиуса R с гладкими внутренними стенками есть возможность в двух равных половинах создать различные значения сопротивления среды, влияющих на скорость полета испытательных образцов. В одной половине тоннеля скорость образца строго равна υ_1, в другой – υ_2. Определите интервал времени, через который встретятся два образца, запускаемые одновременно из любой точки границы давления в противоположных направлениях.



Решение

Будем считать скорость $\upsilon_1 > \upsilon_2$. Обозначим флажком на рисунке предполагаемое место встречи. Тогда к моменту времени t_1 первый образец пройдет ровно половину левой окружности до точки A. Длина этой половины окружности равна πR. С другой стороны, это путь, который проходит первый образец со скоростью υ_1 за время t_1 $\pi R = \upsilon_1 t_1$. Отсюда получаем время:

$$t_1 = \frac{\pi R}{\upsilon_1}.$$ **(4 балла)**



Второй образец, двигающийся с правой стороны, к этому моменту времени успеет пройти только часть окружности до точки B. При этом, расстояние, которое обозначим за x, второй образец проходит со скоростью υ_2 за время t_1:

$x = \upsilon_2 t_1$. **(2 балла)**

Или, с подстановкой времени t_1 получаем:

$x = \upsilon_2 \frac{\pi R}{\upsilon_1}$. **(2 балла)**

При вхождении первого образца в правую область от А до О он будет двигаться со скоростью υ_2, так как в этой части из-за сопротивления движение возможно только с этой скоростью. Второй образец от В к О также двигается со скоростью υ_2. Значит, за одинаковый промежуток времени t_2 оба образца пройдут с одинаковыми скоростями одинаковое расстояние $y = AO = BO$. Но расстояние $x + 2y = \pi R$ равно половине окружности. Подставим сюда значение x:

$\upsilon_2 \frac{\pi R}{\upsilon_1} + 2y = \pi R$. **(4 балла)**

Отсюда можем выразить неизвестное расстояние y:

$$2y = \pi R - \upsilon_2 \frac{\pi R}{\upsilon_1},$$

$y = \frac{\pi R}{2}\left(1 - \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right)$. **(2 балла)**

Так как это расстояние пройдено со скоростью υ_2, то время $t_2 = \frac{y}{\upsilon_2}$. Подставим в это выражение значение y:

$t_2 = \frac{\pi R}{2\upsilon_2}\left(1 - \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right)$. **(2 балла)**

Теперь остается сложить два промежутка времени t_2 и t_1, чтобы получить общее время t до момента встречи.

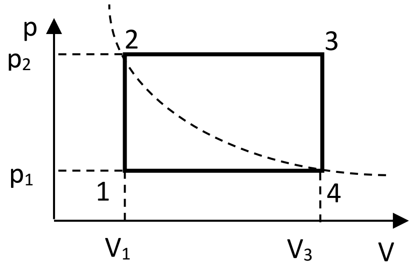
$t = \frac{\pi R}{\upsilon_1} + \frac{\pi R}{2\upsilon_2}\left(1 - \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right)$. **(2 балла)**

Приведя подобные, можно получить окончательный ответ:

$t = \pi R \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2\upsilon_1\upsilon_2}$. **(2 балла)**

Ответ: $t = \pi R \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2\upsilon_1\upsilon_2}$.

4. Газ в количестве одного моля совершает замкнутый цикл, как показано на рисунке. Найти работу, совершенную газом за цикл, если известны температуры: в состоянии 1 – T_1 и в состоянии 3 – T_3. Также известно, что точки 2 и 4 лежат на одной изотерме.



Решение.

Работа – величина аддитивная. Поэтому общая работа газа за цикл может быть найдена суммированием работ газа на каждом участке:

$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}$. **(1 балл)**

Так как участки 1-2 и 3-4 принадлежат изохорным процессам, то работа на этих участках не совершается. $A_{12} = 0$ и $A_{34} = 0$. А работа, совершенная газом на 2-3 и 4-1 в координатах $p - V$ может быть найдена графически, то есть как площадь под графиком. Учитывая, что на 2-3 газ расширяется, $A_{23} > 0$, а на 4-1 газ сжимается, $A_{41} < 0$. Значит:

$$A = +A_{23} - A_{41}.$$

Отсюда имеем, что работа газа за цикл численно равна площади прямоугольника, ограниченного с одной стороны p_1 и p_2 и, с другой стороны – V_1 и V_3. Алгебраически это можно записать как:

$$A = (p_2 - p_1)(V_3 - V_1).$$ **(3 балла)**

Так как ни один из этих параметров не известен, то для состояний 1 и 3 запишем уравнение Менделеева-Клапейрона, так как в этих состояниях известны температуры согласно условию:

$$p_1 V_1 = \nu R T_1,$$

$$p_2 V_3 = \nu R T_3.$$ **(1 балл)**

Разделим почленно эти равенства:

$$\frac{p_1 V_1}{p_2 V_3} = \frac{T_1}{T_3}. \qquad (1)$$ **(2 балла)**

Теперь учтем, что точки 2 и 4 лежат на одной изотерме. Это означает, что $T_2 = T_4$. Или, согласно закону Бойля-Мариотта, $p_2 V_1 = p_1 V_3$. Сравнив это соотношение с соотношением (1), получим, что:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_1}{V_3}. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем:

$$\frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_3}.$$

Или, извлекая квадратный корень:

$$\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_3}}. \qquad (3)$$ **(4 балла)**

Аналогично имеем и для соотношения объемов:

$$\frac{V_1}{V_3} = \sqrt{\frac{T_1}{T_3}}. \qquad (4)$$ **(2 балла)**

Теперь в уравнении $A = (p_2 - p_1)(V_3 - V_1)$ вынесем за скобки из первой p_2, а из второй - V_3:

$$A = p_2 \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right) V_3 \left(1 - \frac{V_1}{V_3}\right).$$ **(2 балла)**

Нетрудно заметить, что в каждой из скобок можно произвести замену, согласно соотношениям (3) и (4):

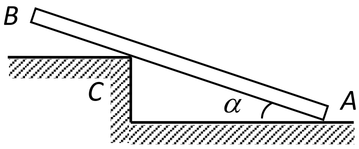
$$A = p_2 \left(1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_3}}\right) V_3 \left(1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_3}}\right).$$ **(2 балла)**

Сделаем преобразования, учитывая, что $p_2V_3 = \nu RT_3$ и окончательно получим ответ:

$$A = \nu RT_3\left(1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_3}}\right)^2. \quad \textbf{(3 балла)}$$

Ответ: $A = \nu RT_3\left(1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_3}}\right)^2.$

5. Определите коэффициент трения k, при котором однородный стержень AB будет находиться в равновесии в положении, указанном на рисунке, если угол наклона стержня $\alpha = 30°$. Учесть, что пол гладкий, а выступ C шероховатый.



Решение:

Так как стержень находится в равновесии, воспользуемся первым условием равновесия: векторная сумма всех сил, приложенных телу, равна нулю.

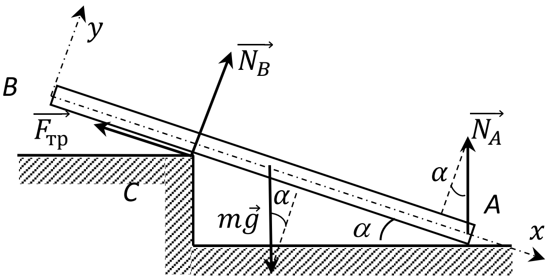


Рисунок **(4 балла)**

Тогда:

$$\overrightarrow{F_{тр}} + \overrightarrow{N_B} + m\vec{g} + \overrightarrow{N_A} = 0. \quad \textbf{(2 балла)}$$

Выбрав направление осей x и y, получаем соответствующие уравнения:

$$-F_{тр} + mg\sin\alpha - N_A\sin\alpha = 0,$$

$$N_B - mg\cos\alpha + N_A\cos\alpha = 0. \quad \textbf{(4 балла)}$$

Учтем определение силы трения $F_{тр} = kN_B$.

Тогда:

$$-kN_B + mg\sin\alpha - N_A\sin\alpha = 0. \quad \textbf{(2 балла)}$$

Вынесем за скобки в этом выражении $\sin\alpha$, а в предыдущем выражении $\cos\alpha$:

$$\sin\alpha\,(mg - N_A) = kN_B$$

$$\cos\alpha\,(mg - N_A) = N_B. \quad \textbf{(4 балла)}$$

Поделим почленно эти два выражения и получим окончательный ответ:

$$tg\alpha = k. \quad \textbf{(4 балла)}$$

Ответ: $tg\alpha = k$.